Страхиња Радић

Формуле из Реалних и комплексних функција

[верзија 0.8 од 26.07.2010.]

Комплексна анализа („комплексни део“)

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

▸▸ Основне операције над комплексним бројевима ($w = u + \mathbf{i}v$, $z = x + \mathbf{i}y$):

- ▼ Сабирање: $w + z \stackrel{\text{def}}{=} (u + x) + \mathbf{i}(v + y)$
- ▼ Множење „скаларом“ (реалним бројем): $k \cdot z \stackrel{\text{def}}{=} kx + \mathbf{i}ky$, $k \in \mathbf{R}$
- ▼ Множење: $w \cdot z \stackrel{\text{def}}{=} (ux - vy) + \mathbf{i}(uy + vx)$
- ▼ Конјуговање: $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - \mathbf{i}y$
- ▼ Норма: $|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$

▸▸ Функција f је *аналитичка* (*холоморфна*) у тачки $z_0 \in \mathbf{C}$ ако она има извод у некој околини те тачке. Пише се: $f \in \mathscr{H}(z_0)$.

▸▸ Пресликавање

$$w - w_0 = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0)$$

се назива *тангентним пресликавањем* функције f у тачки z_0.

▸▸ Ако постоји $f'(z_0) \neq 0$, онда кажемо да је пресликавање f *конформно* у тачки z_0. Тада тангентно пресликавање чува оријентацију и углове.

▸▸ Оператори

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\Big) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

се називају *Коши-Римановим диференцијалним операторима*.

▸▸ Функција $f = u + \mathbf{i}v$ је ($\mathbf{C}$–)диференцијабилна у тачки $z_0 \in \mathbf{C}$ ако је f Риман-диференцијабилна у z_0 (посматрано као $(\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0) \in \mathbf{R}^2$), и ако важи

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0,$$

Ово је еквивалентно са:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

. . . .

▸▸ Функција f је *мероморфна**) у некој области ако у њој нема других сингуларитета осим полова.

Ако је f мероморфна у $\mathbf{C}$, онда је $z_0 = \infty$ изоловани или неизоловани сингуларитет.

ЕЛЕМЕНТАРНЕ КОМПЛЕКСНЕ ФУНКЦИЈЕ

• **Транслација, ротација и хомотетија**

$$t(z) = z + C, \quad C \in \mathbf{C};$$
$$r(z) = e^{\mathbf{i}\theta} \cdot z, \quad \theta \in \mathbf{R};$$
$$h(z) = k \cdot z, \quad k \in \mathbf{R}.$$

• **Билинеарно пресликавање**

▸▸ Пресликавање облика:

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \quad ad - bc \neq 0,$$

назива се *билинеарним пресликавањем.* Оно је композиција транслације, хомотетије и ротације:

$$w(z) = A + \frac{|B| \cdot e^{\mathbf{i}\theta}}{z + C}.$$

Билинеарна пресликавања чувају симетрију.

• **Функција Жуковског**

$$Ж(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)$$

$$Ж'(z) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{z^2}\Big),$$
$$Ж'(z) \neq 0 \text{ (конформност) за } z \neq \pm 1.$$

• **Експоненцијална функција**

$$e^z = e^{x + \mathbf{i}y} = e^x \cdot e^{\mathbf{i}y} = e^{\operatorname{Re} z} \cdot e^{\mathbf{i} \operatorname{Im} z} =$$
$$= e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y) = e^x \cos y + \mathbf{i}e^x \sin y$$

Слика тачке $z \in \mathbf{C}$ експоненцијалном функцијом је $w \in \mathbf{C}$, такво да је $|w| = e^{\operatorname{Re} z}$ а $\arg w = \operatorname{Im} z$.

*) Грчки: μέρος — делимичан, ὅλος — цео, μορφή — облик.

• Функција $1/z$

Према дефиницији, $z \cdot \frac{1}{z} = 1 = 1 + 0 \cdot \mathbf{i} = (1, 0)$, па је одатле

$$\frac{1}{z} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x - \mathbf{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Дакле, пресликавање $1/z$ је композиција инверзије у односу на јединични круг и симетрије у односу на реалну осу.

Инверзија у односу на круг $k(O, r)$ је пресликавање које тачку P слика у тачку P', тако да важи

$$OP \cdot OP' = r.$$

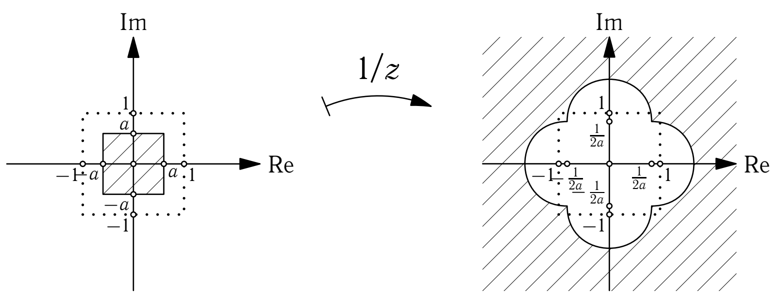
Инверзијом се тачка $(0, 0)$ слика у „тачку ∞“ и обрнуто.

- ▸▸ Права која не садржи тачку $(0, 0)$ се инверзијом пресликава на круг који садржи тачку $(0, 0)$.
- ▸▸ Права која садржи тачку $(0, 0)$ се инверзијом пресликава на саму себе.
- ▸▸ Круг који не садржи тачку $(0, 0)$ се инверзијом пресликава на круг који не садржи тачку $(0, 0)$.
- ▸▸ Круг који садржи тачку $(0, 0)$ се инверзијом пресликава на праву одређену пресечним тачкама са кругом k инверзије. Притом се лук који садржи $(0, 0)$ слика у полуправе које не садрже дуж одређену пресечним тачкама круга са кругом инверзије.

▸▸ Слика неке области елементарном функцијом или композицијом више елементарних функција се одређује пресликавањем кључних елемената области (руба, тачке $(0, 0)$, осталих карактеристичних тачака, итд.).

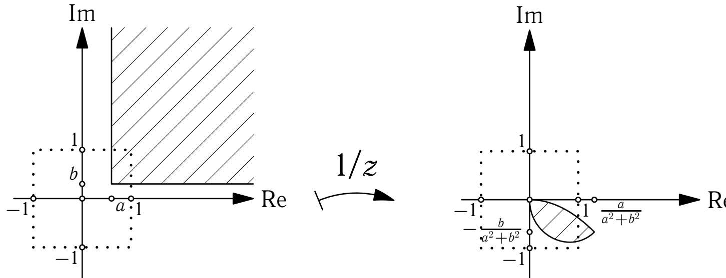
• Примери

▸▸ Област $D = \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z \in [-a, a], \operatorname{Im} z \in [-a, a], a > 0 \}$ се функцијом $1/z$ пресликава на следећу област:



Дужи које чине руб области D се инверзијом у односу на јединични круг сликају у одговарајуће лукове, који се онда сликају симетријом у односу на реалну осу. Тачке које су унутар јединичног круга се сликају у тачке које су ван јединичног круга и обрнуто; посебно, тачка $(0, 0)$ се слика у „тачку ∞“, док се нпр. тачка (a, a) слика у тачку $\left(\frac{1}{2a}, -\frac{1}{2a} \right)$.

▸▸ Област $D = \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > a, \operatorname{Im} z > b; a, b > 0 \}$ се функцијом $1/z$ пресликава на следећу област:



Карактеристична је тачка (a, b) која се инверзијом у односу на јединични круг слика у тачку $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2} \right)$. Она се затим симетријом у односу на реалну осу слика у тачку $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$.

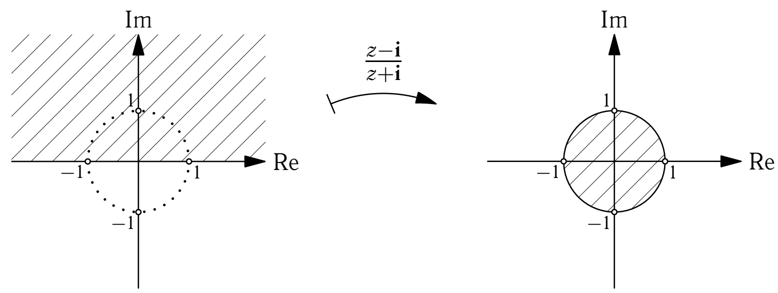
• Функција $\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$ (посебан случај билинеарне функције)

▸▸ Ова функција се може представити као композиција:

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}} = 1 + \frac{2\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}} = 1 + \frac{2e^{\mathbf{i}\pi/2}}{z+\mathbf{i}} = (w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1)(z), \\ w_1(z) &= z + \mathbf{i}, \\ w_2(w_1) &= 1/w_1, \\ w_3(w_2) &= 2e^{\mathbf{i}\pi/2} \cdot w_2, \\ w_4(w_3) &= 1 + w_3, \end{aligned}$$

• Пример

Горња полураван, $H^+ = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, пресликава се функцијом $\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$ на јединични диск $\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.



Пошто је $\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}} \cdot \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = 1$, функција $w_2(z) = \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}$ је инверз функције w. Зато она слика H^+ у **комплемент** јединичног диска Δ, скуп $\mathbf{C} \setminus \Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}$.

• Лоранов ред

Нека је $f(z) = \frac{1}{z-a}$, $a \in \mathbf{C}$. Ова функција је холоморфна у $\mathbf{C} \setminus \{a\}$, као количник холоморфних функција.

Њен остатак (резидуум) у тачки a је

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 1.$$

Ако је нека коначна тачка сингуларитет функције f, онда се она може свуда осим у околини тог сингуларитета развити у ред

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad z_0 \in \mathbf{C}.} \text{ [Лоранов ред]}$$

Ако је тачка a:

▸▸ $\boxed{\text{отклоњив сингуларитет,}}$ тј. $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) < +\infty$, онда је функција холоморфна после додефинисања у z_0. Притом је $a_{-n} = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, тј. функција је једнака Тејлоровом реду.

▸▸ $\boxed{\text{пол реда } n,}$ тј. важи $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, онда је $a_{-n} = 0$, $n > k$ и $a_{-k} \neq 0$, тј. функција се може развити у Лоранов ред:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

▸▸ $\boxed{\text{есенцијални сингуларитет,}}$ тј. $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, онда је $a_{-n} \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, и функција се може развити у Лоранов ред:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

▸▸ Лоранов ред се своди на Фуријеов сменом $z = e^{\pi \mathbf{i} w}$.

ИНТЕГРАЛ КОМПЛЕКСНЕ ФУНКЦИЈЕ

• Резидуум (остатак)

▸▸ *Резидуум* је вредност криволинијског интеграла мероморфне функције дуж путање која обухвата један њен сингуларитет:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z,}$$

γ је позитивно оријентисана и обухвата сингуларитет c.

▸▸ Ако је z_0 пол реда k функције f, онда је

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(k-1)!}[(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.}$$

▸▸ Ако је $f = g/h$, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, тј. z_0 је пол првог реда функције f, онда

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.}$$

• Основни метод израчунавања интеграла

Нека је $\gamma : z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ непрекидно диференцијабилни пут, и нека је f непрекидна функција на γ. Тада је

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ако f изразимо као $f = u + \mathbf{i}v$, и $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathbf{i}\,\mathrm{d}y$, биће:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathbf{i}\int_\gamma v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

• Кошијева интегрална теорема (КИТ)

Нека је γ затворени пут који може да се непрекидно деформише у тачку, и нека је $f \in \mathscr{H}(D)$. Тада је

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.}$$

• Кошијева интегрална формула (КИФ)

Нека је $f \in \mathscr{H}(D)$, $f \in \mathscr{C}(\overline{D})$, и нека је ∂D оријентисана граница која се састоји од коначног броја непрекидних кривих. Тада важи:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} f(z), & z \in D,\\ 0, & z \notin D.\end{cases}}$$

• Кошијева теорема о резидууму („Кошијев рачун остатака“ — КРО)

Нека је $f \in \mathscr{H}(D \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$, где су $a_1, \dots, a_n \in D$, нека је $f \in \mathscr{C}(\overline{D} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$, и нека је ∂D оријентисана граница која се састоји од коначног броја непрекидних кривих. Тада:

$$\boxed{\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).}$$

• Жорданове леме

Лема 1. *Нека је $f \in \mathscr{H}(D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$, где је $D = \{z \mid \alpha < \arg(z-a) < \beta\}$, и $a_1, \ldots, a_n \in D$.*

Ако је

$$\lim_{z\to\infty} (z-a)f(z) = A,$$

онда

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathbf{i}\cdot A(\beta-\alpha),$$

где је $C_R = \{z \mid |z-a| = R\}$ и $\alpha < \arg(z-a) < \beta$.

Лема 2. *Нека важе услови леме 1.*

Ако је

$$\lim_{z\to a} (z-a)f(z) = B,$$

онда

$$\lim_{R\to 0} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathbf{i}\cdot B(\beta-\alpha).$$

Лема 3. *Нека је $f \in \mathscr{H}(D)$, где је $D = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $f(z) = e^{\mathbf{i}az} g(z)$.*

Ако је

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0,$$

$$\left[\lim_{R\to\infty} \max_{\theta\in[0,\pi]} \left|g(Re^{\mathbf{i}\theta})\right| = 0,\right]$$

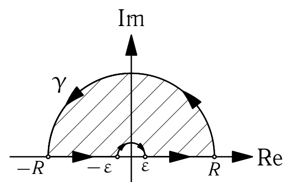
онда

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)\cdot e^{\mathbf{i}az}\,\mathrm{d}z = 0,$$

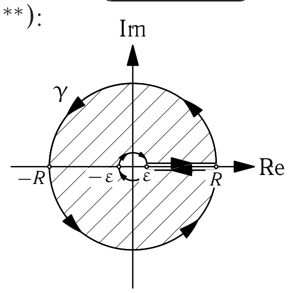
за свако $a > 0$, при чему је $C_R = \{z \mid |z| = R,\ 0 < \arg z < \pi\}$.

• Поступак решавања интеграла преко КРО

▸▸ Одреди се парност подинтегралне функције $f(z)$. Ако је она $\boxed{\text{парна,}}$ примењује се контура $\gamma_{R,\varepsilon}$ (означава се и са Γ или C)*):



Ако функција $f(z)$ $\boxed{\text{није парна,}}$ примењује се контура $\gamma_{R,\varepsilon}$**):



▸▸ Одреде се сингуларитети функције $f(z)$. Посматрају се они сингуларитети који су обухваћени контуром γ.

▸▸ Искористи се КРО, интеграл се растави на интеграле по деловима контуре γ, а онда се интеграл по **дужима** добија преко осталих познатих интеграла. Интеграл $I = \int_\gamma$ се добија рачунањем резидуума, интеграл $I_R = \int_{C_R}$ се обично добија параметризацијом $z = Re^{\mathbf{i}t}$ и мајорирањем, интеграл $I_\varepsilon = \int_{C_\varepsilon}$ применом Жорданове леме.

▸▸ Применом граничног процеса $\lim\limits_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to+0}}$ на интеграл по дужима се добија тражени реални интеграл $I - I_R - I_\varepsilon$.

ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

• Логаритамски резидуум

Ако је $z = a$ нула, пол или есенцијални сингуларитет функције f, онда је $z = a$ сингуларитет функције $\frac{f'}{f}$. Тада има смисла рачунати логаритамски резидуум у нули.

▸▸ Ако је $z = a$ нула реда n функције f, онда је

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = n.$$

▸▸ Ако је $z = a$ пол реда n функције f, онда је

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n.$$

• Принцип аргумента

▸▸ Ако је f мероморфна у области D и $G \Subset D$, при чему је ∂D непрекидна крива, и f нема нула ни полова на ∂D, онда

$$\boxed{\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i}\cdot(N-P),}$$

где је N број нула функције $f(z)$ у области G, и свака нула се рачуна k пута, где је k њен ред, P је број полова функције f у области G, а сваки пол се рачуна n пута, где је n његов ред.

Теорема Рушеа. *Нека је $D \subset \mathbf{C}$ ограничена област чија је граница глатка затворена Жорданова крива. Ако су $f,\ g \in \mathscr{H}(\overline{D})$, и ако је $|f(z)| > |g(z)|$, $z \in \partial D$, тада f и $f+g$ имају исти број нула у области D.*

*) Популарно названа „слонче“.

**) Популарно названа „карнекс“.

• Тип 1: $\boxed{\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t}$

Смена: $z = e^{\mathbf{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{\mathbf{i}z}$;

$$I = \int_\gamma R\left(\frac{1}{2\mathbf{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathbf{i}z},$$

$$\gamma : z = e^{\mathbf{i}t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

• Тип 2: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x}$

Од интереса је случај када R није искључиво непарна.

Користи се, нпр., Жорданова лема 1: $\lim\limits_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$, па је $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} R(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Даље се применом Кошијеве теореме о резидууму добија

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i} \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname*{Res}_{z=a} R(z).$$

• Тип 3: $\boxed{\int_0^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x}$

▸▸ Ако је R парна, интеграл се своди на тип 2.

▸▸ Иначе, R не сме да има полове на $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$.

Идеја: применити теорему о збиру резидуума на помоћну функцију: $f(z) = R(z)\ln z$ (која је мероморфна у $\Omega = \mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$, где је $\operatorname{Im}(\ln z) = \arg z \in [0, 2\pi)$).
За мале ε, $h > 0$ и велико r, добијамо ($R = P_n/Q_m$)

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,r,h}} R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i} \sum_{Q(a)=0} \operatorname*{Res}_{a} R(z)\ln z.$$

За фиксиране ε, $r > 0$ важи:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{h\to+0\\ \operatorname{Im} z>0}} R(z)\ln z = R(x)\ln x, \\ &\lim_{\substack{h\to+0\\ \operatorname{Im} z<0}} R(z)\ln z = R(x)(\ln x + 2\pi\mathbf{i}). \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{равномерно}\\ \text{по}\\ x \in [\varepsilon, r].\end{array}$$

Применом Жорданових лема 1 и 2 добијамо за $S = \{z \in \mathbf{C}^* \mid 0 < \arg z < 2\pi\}$:

$$I = -\sum_a \operatorname*{Res}_a R(z)\ln z.$$

• Тип 4: $\boxed{\int_0^{+\infty} R(x)x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x, \qquad \alpha \in (0,1)}$

▸▸ Ако је R рационална функција без полова, $\lim\limits_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$, тј. ако је R облика $\frac{P_n}{Q_n}$, тада је $n \leqslant m - 1$.

Интегрише се функција $f(z) = \frac{R(z)}{g(z)}$, где је $g(z) = z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$, са избором ln као у типу 3. Добија се

$$I_\alpha = \frac{\pi e^{\pi\mathbf{i}\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} S, \qquad S = \sum_{Q(a)=0} \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

▸▸ Ако је R парна, онда се I_α може израчунати преко збира резидуума функције f у горњој полуравни H:

$$I\cos^2\left(\alpha\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -\pi \operatorname{Im} S^+, \qquad S^+ \text{ је збир рез. у } H^+.$$

• Тип 5: $\boxed{\int_0^{+\infty} R(x)\ln x\,\mathrm{d}x}$

R је рационална функција без полова, $\lim\limits_{x\to\infty} xR(x) = 0$.

▸▸ Ако R није парна, интегрише се функција $f(z) = R(z)(\ln z)^2$, $\arg z \in (0, 2\pi)$.

▸▸ Ако R јесте парна, интегрише се функција $f(z) = R(z)\cdot h(z)$, где је $h(z)$ грана логаритма дефинисана са

$$h(z) = \ln|z| + \mathbf{i}\varphi, \qquad \varphi = \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

ИНТЕГРАЛ НА МЕРЉИВОМ ПРОСТОРУ

• Конвергенција интеграла

Теорема о монотоној конвергенцији. *Нека је* $(X,\mathscr{M},\mu)$ *простор са мером, и нека је* $f_n : X \to \bar{\mathbf{R}}$ *монотоно растући низ позитивних функција, тј.* $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$. *Тада*

$$\forall x \in \bar{\mathbf{R}} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.}$$

Лема Фатуа. *Нека је* $(X,\mathscr{M},\mu)$ *простор са мером и* $\{f_n\}$ *низ позитивних функција* $f_n : X \to \bar{\mathbf{R}}$ $(f_n \geqslant 0)$. *Тада*

$$\boxed{\liminf_{n\to+\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.}$$

Ако је $f_n^-(x) = g_n(x) = \inf_{\nu\geqslant n} f_\nu(x)$, *онда је* $g_n \leqslant f_n$ *и*

$$\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Теорема о доминантној конвергенцији. *Нека је* $(X,\mathscr{M},\mu)$ *простор са мером, и нека је* $\{f_n\}$ *низ функција* $f_n : X \to \mathbf{C}$ *који за свако* $x \in X$ *конвергира ка функцији* f. *Ако постоји функција* g *која је Лебег-интеграбилна на* X, *таква да*

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall x \in X \qquad |f_n(x)| \leqslant g(x),$$

онда

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$$

и

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.}$$

Теорема Левија. *Нека је* $(X,\mathscr{M},\mu)$ *простор са мером и* $\{f_n\}$ *низ функција* $f_n : X \to \mathbf{C}$. *Ако је*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty,$$

онда ред $\sum f_n(x)$ *конвергира скоро свуда (тј. скуп тачака у којима не конвергира је* μ*–мере нула), и*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu.}$$

• Примена ТДК код израчунавања граничних вредности интеграла

▸▸ Пронађе се *доминанта* низа $\{f_n\}$: функција g, таква да је $|f_n| \leqslant g$, и провери се да ли је она *мерљива,* а онда и да ли задовољава остале услове ТДК: да ли је Лебег-интеграбилна.

(Испитивање m-интеграбилности)
▸▸ Ако је мерљива и ненегативна, g дефинише меру $\varphi(E) = \int_E g(x)\,\mathrm{d}m$.
▸▸ Формира се монотони низ скупова $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, такав да је $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = A$, и посматра $\lim_{n\to+\infty}\varphi(A_n)$. Пошто је функција φ мера, она је σ-адитивна, па је за монотони низ мерљивих скупова $\{A_n\}$ та гранична вредност једнака $\varphi(A)$, одакле се на основу дефиниције φ добија $\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} g(x)\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to+\infty}\int_A g(x)\,\mathrm{d}m$.
▸▸ Сегмент A_n је коначан, па је функција g на њему Риман-интеграбилна, а одатле и Лебег-интеграбилна. Дакле, $\int_{A_n} g\,\mathrm{d}m = \int_{A_n} g\,\mathrm{d}x$.
▸▸ Због јединствености граничне вредности, из $\varphi(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(A)$ следи $g \in \mathscr{L}(A)$.

▸▸ Пошто се ТДК може применити, њеном применом добијамо $\lim_{n\to+\infty}\int_A = \int_A \lim_{n\to+\infty}$.

ИЗВОРИ

[1] Белешке са предавања из Теорије реалних и комплексних функција („комплексни део“) код проф. Мирољуба Јевтића

[2] Скрипта из „реалног дела“ Теорије реалних и комплексних функција од проф. Миодрага Матељевића

[3] Драгољуб Кечкић: *Анализа 3: збирка задатака*, СИА „Кечкић“, 2005.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Contour_integration [посећено 07.07.2010.]

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Riemann_equations [посећено 13.07.2010.]

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_lemma [посећено 22.07.2010.]

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Laurent_series [посећено 07.07.2010.]

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Meromorphic_function [посећено 07.07.2010.]